

Wenn Überlegungen nicht weiterhelfen ...

Unterrichtsentwurf einer Stunde zum Thema

„Empirische Ermittlung und Festlegung von Wahrscheinlichkeiten“

Hans-Joachim Brehm (StR.)

Datum: 25. Januar 2019

Ort: Kant-Gymnasium

Fach: Mathematik

Zeit: 11-35 Uhr – 12.20 Uhr

Raum: PW-Raum (2. Stock)

Klasse: 6

Datum	Fach	Klasse	Besucher	Stundenthema	Inhalt, Kompetenzbezug
20. Jan 1917	Ma	Kant Klasse 6	FS GS Brehm	Indirekte Proportionalität	<p><i>Zuordnungen und Funktionen</i> Die Schüler_innen beschreiben die Eigenschaften direkt und indirekt proportionaler Zusammenhänge und grenzen solche mittels der Eigenschaften von anderen Zuordnungen ab.</p> <p><i>Argumentieren</i> Die Schüler_innen unterscheiden anhand diverser Aufgaben verschiedene Arten von Zuordnungen, klassifizieren diese nach verschiedenen Möglichkeiten zur Lösung und entwickeln Rechenstrategien zur Lösung von Aufgaben, die durch indirekte Proportionalität zu lösen sind.</p>
28. Juli 2018	Ma	Kant Klasse 5	FS GS Brehm	Das legendäre „Drei-Töchter-Problem“	<p><i>Zahlen und Operationen</i> <i>Problemlösen</i> Die Schüler_innen entwickeln unter Benutzung der Teilbarkeitsbeziehung und logischer, den Zeitablauf berücksichtigender Überlegungen durch systematisches Probieren und Eingrenzen eine Lösung für das vorgelegte Problem und reflektieren diese Lösungsstrategien.</p>
18. Januar 2019	Ma	Kant Klasse 6	FS GSa Brehm	Dem Zufall auf der Spur	<p><i>Daten und Zufall</i> <i>Argumentieren</i> Die Schüler_innen ermitteln (unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse des Würfelns mit einem Würfel) über die Kombinationsmöglichkeiten rational begründete Wahrscheinlichkeiten für das Zufallsexperiment „Würfel mit zwei Würfeln“.</p>

1.

Individuelle Kompetenzentwicklung

Ich will versuchen, durch vielfältigen, funktionalen Medieneinsatz den Unterricht interessant zu gestalten und hohe Schüler_innenaktivität zu erreichen.

2.

Thema der Unterrichtsreihe

Thema: Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeiten

Leitidee der gesamten Sequenz: [L5] Daten und Zufall

Überblick über die Unterrichtsreihe::

Stunde	Datum	Stundenthema	Kompetenz- und Standardbezug	Bemerkungen
1	16.Jan	Das Reißnägel-Problem	Die Schüler_innen erkennen durch die häufige Durchführung eines Zufallsexperimentes, dass die relative Häufigkeit eine sich mit zunehmender Versuchsanzahl stabilisierende und somit geeignete Größe zur Vorhersage des Ausgangs eines Zufallsexperimentes ist. <i>[K1] Argumentieren</i>	
2		Zufallsexperimente	... planen ein (Nicht-Laplace-)Zufallsexperiment mit vorgegebenem Material, führen es hinreichend häufig aus, um relative Häufigkeiten bestimmen zu können, und stellen Experiment und Ergebnis unter Benutzung der Fachsprache vor. <i>[K6] Kommunizieren</i>	
3	18. Jan	Dem Zufall auf der Spur	... ermitteln (unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse des Würfels mit einem Würfel) über die Kombinationsmöglichkeiten	UB FS GSa

			rational begründete Wahrscheinlichkeiten für das Zufallsexperiment „Würfeln mit zwei Würfeln“ in der Standardversion Augensumme. <i>[K1] Argumentieren</i>	
4	23. Jan	Man kann auch anders würfeln	... erlernen wenden die mathematisch korrekten Sprech- und Schreibweisen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und Wahrscheinlichkeiten an verschiedenen Beispielen beim Würfeln mit zwei Würfeln (Augenprodukt, Augendifferenz) an. <i>[K5] Mit symbolischen, formalen ... Elementen ... umgehen</i>	
5		Glücksräder	... erkunden das Glücksrad als weiteres Zufallsexperiment und stellen selbst verschiedene Glücksräder mit rational begründbaren sowie rational nicht begründbaren Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse her. <i>[K1] Argumentieren</i>	
6	25. Jan	Wenn Überlegungen nicht weiterhelfen...	s.u. unter 4.	UB FS GSb

3.

Thema der Unterrichtsstunde

Thema: Wenn Überlegungen nicht weiterhelfen ...

Inhalt: Beschreibung, Durchführung und empirische Ermittlung und Festlegung von Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse bei Zufallsexperimenten an nicht gleichmäßig eingeteilten Glücksrädern.

Standard des RLP / Kompetenzen	Stand der Kompetenzentwicklung	Konkretisierung der Standards für die vorliegende Stunde
<p>Prozessbezogene Kompetenz: [K2] Argumentieren Die Sschüler_innen entwickeln unterschiedliche Strategien (sowohl über relative Häufigkeit als auch durch theoretische Überlegungen), um für ein Zufallsexperiment zu tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbelegungen zu kommen. (SchiC Kant-Gymnasium)</p>	<p>Die Schüler_innen können Zufallsexperimente durchführen, beschreiben, die Ergebnismenge angeben und relative und absolute Häufigkeiten von Ergebnissen (als Bruchzahl) bestimmen.</p>	
<p>Inhaltsbezogene Standards/Leitidee: [L5] Daten und Zufall Begründen der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit von Ergebnissen [...] (Regel von Laplace) Vergleichen von theoretisch ermittelten Wahrscheinlichkeiten mit empirischen Beobachtungen (RLP, Teil C, Mathematik, S.61)</p>	<p>Eine rationale Begründung der Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen eines Zufallsexperimentes als Bruchzahl (über Gleichwahrscheinlichkeit) wurde thematisiert. Die Bestimmung absoluter und relativer Häufigkeiten ist bekannt und eingeübt, nicht aber als Grundlage zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten thematisiert.</p>	<p>Die Schüler_innen ermitteln für rational nicht offensichtlich zugänglich bearbeitbare Zufallsexperimente am Glücksrad Wahrscheinlichkeitsbelegungen über absolute und relative Häufigkeiten und können für beliebige Zufallsexperimente einen geeigneten Zugang zu Wahrscheinlichkeitsbelegungen benennen.</p>

Individuelle Kompetenzentwicklung aufgrund der exemplarischen Analyse der Lerngruppenheterogenität:

Teilgruppe/Niveaustufe (Repräsentant_innen)	Aktueller Lernstand mögliche Schwierigkeiten	angestrebte Kompetenzförderung	Maßnahmen zur individuellen Kompetenzentwicklung
Nicht durchführbar, da Klasse unbekannt			

5.	Unterrichtsvoraussetzungen
-----------	-----------------------------------

Allgemein: Die Klasse 6 am Kant Gymnasium besteht aus 24 Schüler_innen, die seit der 5. Jahrgangsstufe das Kant-Gymnasium besuchen und aus diversen Spandauer Grundschulen stammen. Nach Auskunft der Klassen- und Mathematiklehrerin, Frau Lede-Piper, ist die Leistungsstärke, verglichen mit anderen, ehemaligen Klassen, eher gering. Dieser Eindruck bestätigte sich sowohl in einer Seminarstunde im letzten Schuljahr als auch in den bisherigen Stunden der Unterrichtsreihe. Ich habe in der Klasse bislang keine weiteren als die genannten Stunden durchgeführt oder gesehen. Es fehlt mir daher weitgehend die Möglichkeit, die individuelle Leistungsfähigkeit der Schüler_innen einzuschätzen, zumal weite Teile des von mir erteilten Unterrichts in Gruppenarbeit und nicht in der dem Sitzplan entsprechenden Sitzordnung stattgefunden haben.

Speziell: Am Kant-Gymnasium findet heute der „Tag der offenen Tür“ statt. Deswegen endet der Unterricht ansonsten für alle Klassen ausnahmslos nach der 4. Stunde zur Vorbereitung dieser Veranstaltung, lediglich die 6. Klasse bleibt -obwohl auch in den „Tag der offenen Tür“ eingebunden- noch anwesend.

Fachlicher Schwerpunkt: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit der Vorhersage von Ergebnissen eines Zufallsexperimentes. Unter einem Zufallsexperiment wird ein wiederholbares, genau in seinen Bedingungen definiertes Experiment verstanden, bei dem alle möglichen Ausgänge, Ergebnisse genannt, bekannt sind, nicht aber der konkrete Ausgang bei einer Durchführung.

Zur Angabe von möglichen Wahrscheinlichkeitsbelegungen gelangt man über Wahrscheinlichkeitsfunktionen p , die folgender Axiomatik (nach KOLMOGOROFF) genügen:

Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Dann heißt jede Funktion p von der Menge $S = P(\Omega)$, also der Potenzmenge von Ω , in das reellzahlige Intervall $[0,1]$ eine Wahrscheinlichkeit,

wenn

$$(1) p(S) = 1$$

$$(2) p(\emptyset) = 0$$

$$(3) p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) \text{ für alle } E, F \in S$$

Für endliche Mengen Ω erfüllen der rationale Ansatz, dass alle Elemente dieser Menge die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen und damit für alle $E \in P(\Omega)$ gilt

$$p(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{\text{"Anzahl der günstigen Möglichkeiten"}}{\text{"Anzahl aller Möglichkeiten"}} \text{ (die sog. Klassische oder LAPLACE-Wahrscheinlichkeit) die axiomatischen Vorgaben ebenso wie}$$

jede empirisch bestimmte relative Häufigkeitsfunktion h . Da es sich in beiden Fällen nur eine Modellbildung handelt, ist -ebenso wie bei anderen möglichen Wahrscheinlichkeitsfunktionen, keineswegs gesichert, dass es sich um ein geeignetes, tragfähiges Modell handelt.

Didaktische Reduktion: Eine axiomatische Einführung der Wahrscheinlichkeit ist an der Schule nicht möglich. Auf die Einführung von Ereignissen und die damit notwendige Unterscheidung zu Ergebnissen wird verzichtet. Alle verwendeten Zufallsexperimente sind einstufig oder werden als einstufig betrachtet, auf die explizite Zurückführung des einstufig durchgeführten Zufallsexperimentes „Würfeln mit zwei Würfeln“ auf das zweistufige LAPLACE-Experiment „Würfeln mit einem Würfel“ wurde so verzichtet.

In der heutigen Stunde hat der Begriff des Ereignisses allerdings nur untergeordnete Bedeutung.

Wahrscheinlichkeiten werden in der Fachwissenschaft grundsätzlich als Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 angegeben, im umgangssprachlichen Alltagszusammenhang dagegen zumeist als Prozentzahlen. Beide Darstellungsformen sind in der Klasse unzureichend bzw. noch nicht bekannt, sodass lediglich mit Bruchzahlen gearbeitet wird.

Aufgabenanalyse: Glücksräder sind, wenn die Einteilung sich auf offensichtlich gleichgroße Segmente zurückführen lässt, einer rational begründeten Wahrscheinlichkeitsbelegung zugänglich. Dabei spielt lediglich die Größe der Flächenbegrenzung am Kreisbogen eine Rolle. Somit sind bei genügend kleiner Aufteilung alle verwendeten Glücksräder theoretisch so bearbeitbar, aber für die Schüler_innen bei den gewählten Glücksrädern praktisch nicht durchführbar. Eine Wahrscheinlichkeitsbelegung kann so nur empirisch durch das hinreichend häufige, mindestens 50malige Ausführen des Zufallsexperimentes über eine relative Häufigkeitsfunktion erreicht werden.

Aspekte zur Sprachförderung: Es wird auf korrekte Benutzung der Fachsprache sowie auf mündliche Beiträge in vollständigen Sätzen geachtet, ggf. werden die Schüler_innen aufgefordert, mündliche Beiträge entsprechend zu wiederholen. Auch auf dem Arbeitsbogen soll ein zusammenhängender Text zur Beschreibung des Zufallsexperimentes erstellt werden.

Differenzierungsmaßnahmen: Für die Gruppenarbeit erhalten die weniger leistungsstarken Gruppen Glücksräder mit einem kleineren Ergebnisraum, damit die relativen Häufigkeiten den Erwartungen entsprechen. Stärkere Gruppen sind eher in der Lage, den durch zufallsbedingte Abweichungen der relativen Häufigkeiten vom erwarteten Wert bedingten kognitiven Konflikt zu bewältigen. Hier werden von mir ggf. entsprechende Impulse und Einhilfen gegeben.

7.

Begründung der Lehr- und Lernstruktur

Der Einstieg erfolgt unter Benutzung der von den Schüler_innen in der vorangegangenen Stunde selbst erstellten Glücksrädern unter Benutzung der Methode „Passt - Passt nicht“. Die Glücksräder werden gemäß des Kriteriums „Wahrscheinlichkeiten rational zuordenbar“ und „Wahrscheinlichkeiten nicht rational zuordenbar“ von mir geordnet, damit diese Ordnung von den Schüler_innen sukzessive erkannt wird. Es entsteht damit die Notwendigkeit, für die nicht rational Erfassbaren Glücksräder eine andere Art der Wahrscheinlichkeitszuordnung zu bekommen und damit das Stundenthema.

Die Erarbeitung erfolgt in Gruppenarbeit in heterogenen Gruppen von jeweils vier Personen, um die Schüler_innen noch einmal den Prozess des Ermitteln von relativen Häufigkeiten – diesmal unter dem Aspekt der Ermittlung einer Wahrscheinlichkeit- durchlaufen zu lassen. Einzel- oder Partnerarbeit wäre auch denkbar, würde aber einen unverhältnismäßigen Arbeitsaufwand bedeuten. Außerdem kann durch Arbeitsteilung in der Gruppe effizienter gearbeitet werden. Durch das eigenständige Erstellen der Häufigkeitsfunktion werden sowohl die Problematik des Übernehmens von Häufigkeitsfunktionen für Wahrscheinlichkeiten als auch die Stabilisierung der Versuchsergebnisse gemäß des „Gesetzes der großen Zahlen“ für die Schüler_innen praktisch erfahrbar. Eine besondere Motivation entsteht dadurch, dass die Schüler_innen mit selbst erstelltem Material arbeiten. Auf

eine Präsentation der Ergebnisse wird verzichtet, da nicht die konkreten Ergebnisse, d.h. die ermittelten konkreten Wahrscheinlichkeiten, im Vordergrund stehen, sondern die Vorgehensweise.

Diese wird in der abschließenden Phase im Plenum aufgegriffen. Über die Abstimmung mittels Stimmkarten wird entschieden, ob ein Zufallsexperiment auch rational oder lediglich empirisch mit Wahrscheinlichkeiten belegt werden kann. Diese Methode ermöglicht einerseits, den Lernerfolg festzustellen, und gibt zusätzlich die Möglichkeit zur Diskussion etwaiger Probleme. Ferner wird durch die Übertragung der am Glücksrad gewonnenen Ergebnisse so eine Transferleistung für beliebige Zufallsexperimente gefordert. Diese Phase ist somit nicht nur Sicherung des Stundenergebnisses, sondern des Ergebnisses der gesamten Unterrichtsreihe.

8. Verlaufsplanung

Zeitangaben		Phase/Intention Prozessablauf	Sozialform/ Medien
Zeit	Dauer	Ggf. Aktivitäten / Impulse der Lehrkraft Ggf. Schüler_innenaktivitäten	
11.35	10'	<i>Einstieg:</i> Begrüßung und Vorstellung der Gäste Ordnen der Glücksräder mit der Methode „Passt – Passt nicht“	Sitzkreis Glücksräder
11.45	25'	<i>Erarbeitung:</i> Erklärung und vielfache Durchführung des leistungsdifferenzierten Zufallsexperimentes „Glücksrad“ zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsfunktionen über relative Häufigkeiten. Ggf. Präsentation einzelner Ergebnisse	4er-Gruppen AB „Glücksrad“ Glücksräder Fidget-Spinner
12.10	10'	<i>Sicherung und Transfer:</i> Beurteilung der Möglichkeiten für Wahrscheinlichkeitsbelegungen	Plenum Stimmkarten

9. Antizipation von Schwierigkeiten und Alternativen

Aufgrund der Situation des Unterrichtes zu unterrichtsfreier Zeit und da es sich um die Abschlussstunde der Unterrichtsreihe handelt, wird der Unterricht ggf. auch früher beendet, sofern vollständig durchgeführt.

10.

Ausblick auf die weitere Planung

Entfällt, die Unterrichtseinheit und mein Engagement in der Klasse endet mit dieser Stunde.

11.

Medien

Arbeitsbögen, s.u.

Fidget-Spinner als Glücksrad

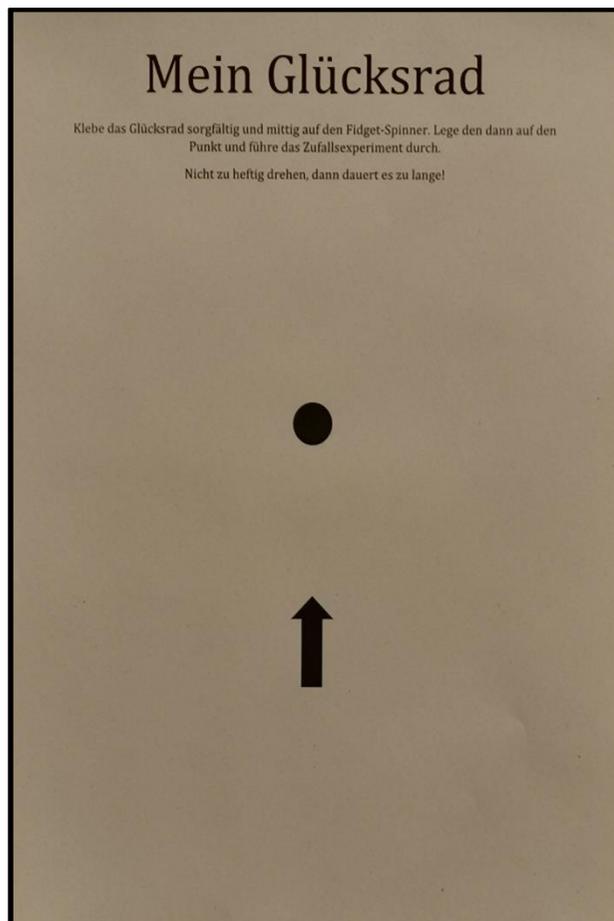
(Von den Schüler_innen hergestellte und von mir bearbeitete) Glücksräder

Abstimmkarten

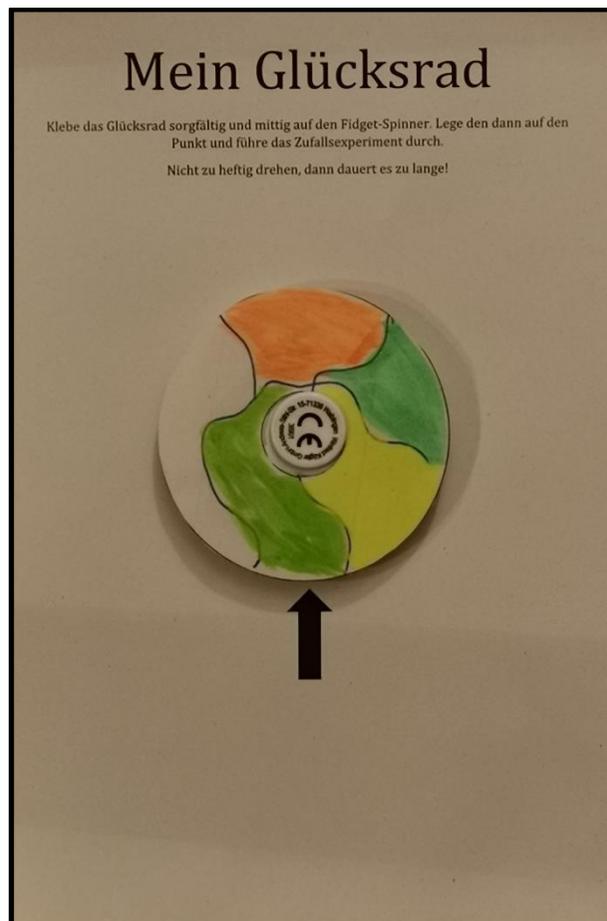
12.

Literaturangaben

Schulinternes Curriculum Kant-Gymnasium Klasse 6 / RLP Teil C - Mathematik



Basisbogen für das Glücksrad



Glücksrad in Aktion

Kant-Gymnasium *** Klasse 6
Mathematik
Wahrscheinlichkeitsrechnung

„Glücksräder“

Name: _____ Datum: _____

Beschreibung des Zufallsversuches

So wird das Experiment durchgeführt:

Ergebnismenge: $\Omega = \{ \quad \quad \quad \}$

Durchführung des Zufallsversuches

(1) Führe nun den Zufallsversuch so oft wie möglich durch und notiere die Anzahl der Durchführungen und die absolute Häufigkeit jedes Ergebnisses auf einem Extrablatt.
(2) Gib als Wahrscheinlichkeit für die jeweiligen Ergebnisse die relative Häufigkeit des Auftretens an.

Angabe der Wahrscheinlichkeiten

$P(\quad) =$	$P(\quad) =$

© Hans-Joachim Brehm
erstellt 2019-01-20

KANT/18-19/KLASSIK/GLÜCKSRÄDER - 1/1

Arbeitsbogen für das Experiment



Von den Schülerinnen entworfene Glücksräder



Abstimmkarten



Fidget-Spinner als Basis für das Glücksrad