

# **Wie viele Flaschen Cola müssen gekauft werden?**

**Unterrichtsentwurf einer Stunde zum Thema**

**„Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch“**

**Hans-Joachim Brehm , StR**

**Datum: 2015-10-16**

**Ort: Kant-Gymnasium**

**Fach: Mathematik**

**Zeit: 8.00 Uhr – 8.45 Uhr**

**Raum: Stammhaus , 17**

**Klasse: 6**

<b>0.</b>	<b>Bisherige Unterrichtsbesuche</b>
-----------	-------------------------------------

Datum	Fach	Klasse/Kurs	Besucher	Stundenthema	Inhalt, Kompetenzbezug	ggf. Bemerkungen
20. März 2015	Ma	Gemischt 1 - 2 - 3	Seminar Brehm	Pentominos: Wie viele Quadrat-Fünflinge gibt es	Form und Veränderung Problemlösen	

<b>1.</b>	<b>Individuelle Kompetenzentwicklung</b>
-----------	--

Ich will mich um eine der Altersgruppe angemessenen Ausdrucksweise sowohl in den Impulsen als auch bei der Formulierung von Aufgaben und Lehrsätzen bemühen, ohne dabei Abstriche an der mathematischen Korrektheit zu machen.

<b>2.</b>	<b>Thema der Unterrichtsreihe</b>
-----------	-----------------------------------

**Thema:** Multiplikation und Division von Bruchzahlen

**Überblick über die Unterrichtsreihe / Unterrichtssequenz:**

**Leitidee der gesamten Sequenz:** Zahlen und Operationen

Stunde	Datum	Stundenthema	Kompetenz- und Standardbezug
<b>1</b>	2015-10-16	„Wie viele Flaschen Cola müssen gekauft werden?“ Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch	<b>Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren</b> Die Schüler_innen entwickeln mittels der Verallgemeinerung eines authentischen Problems die Regel zur Multiplikation einer ganzen Zahl mit einer Bruchzahl.
<b>2</b>		„Macht es denn überhaupt Sinn, durch Brüche zu divi-	<b>Leitidee:</b> Zahlen und Operationen <b>Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren</b>

		<b>dieren?“</b> Division einer natürlichen Zahl durch einen Bruch	Die Schüler_innen leiten anhand der Aufgabe der vorangegangenen Stunde aus der Rückbesinnung auf den Zusammenhang von Multiplikation und Division die Regel zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch her.
3		<b>„Ich soll zwei Drittel von meiner halben Pizza abgeben?“</b> Multiplikation von Bruchzahlen	<b>Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren</b> Die Schüler_innen entwickeln eine Vorstellung von der Sinnhaftigkeit der Multiplikation von Brüchen und leiten die Regel zur Multiplikation zweier Brüche her.
		<b>Wie verteile ich ein Flasche Limonade gerecht auf kleine Gläser?“</b> Multiplikation von Bruchzahlen	<b>Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren</b> Die Schüler_innen entwickeln ausgehend von einer lebensnahen Kontextualisierung eine Vorstellung von der Sinnhaftigkeit des Dividierens von Bruchzahlen durch Bruchzahlen und leiten über den Zusammenhang von Division und Multiplikation die Regel zur Division zweier Brüche durcheinander her.
5/6		<b>„So rechnen wir mit natürlichen Zahlen und Brüchen!“</b> Systematisierung der multiplikativen Rechnungen mit Brüchen und natürlichen Zahlen	<b>Prozessbezogene Kompetenz: Kommunikation</b> Die Schüler_innen erstellen ein Plakat zur Durchführung der verschiedenen Rechenoperationen von Bruchzahlen und natürlichen Zahlen, auch unter rückblickender Einbeziehung von Addition und Subtraktion zur Veröffentlichung als Gedächtnisstütze im Klassenraum
7/8		<b>„Wir können nun nicht nur mit natürlichen Zahlen, sondern auch mit Brüchen ganz vielfältig rechnen!“</b> Übungen zu den verschiedenen Rechenoperationen mit Bruchzahlen	<b>Prozessbezogene Kompetenz: Mit formalen</b> Die Schüler_innen üben sinnstiftend die Multiplikation und Division von Bruchzahlen und natürlichen Zahlen unter Benutzung diverser Aufgabenformate, von Päckchenaufgaben über Umkehraufgaben bis hin zu eher offenen Aufgabenformaten

3.

**Thema der Unterrichtsstunde**

**Thema:** Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch

**Inhalt:** In dieser Stunde sollen die Schüler\_innen die Notwendigkeit, natürliche Zahlen mit einem Bruch zu multiplizieren, an einem geeigneten Beispiel erkennen bzw. erfahren. Das hierzu verwendete Modell soll ferner über die Stunde hinaus tragfähig sein, auch die Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl zu illustrieren. Ferner sollen die Schüler\_innen eine Regel zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl erarbeiten und eigenständig formulieren.

4.

**Kompetenzen und Standards**

Standard des RLP / Kompetenzen		Konkretisierung der Standards für die Stunde
<u>Prozessbezogen:</u>		
<u>Leitidee:</u>	<i>Aufgabe für das Seminar!</i>	

**Individuelle Kompetenzentwicklung:**

**Allgemein:** Die Klasse 6 ist die Klasse des grundständigen Zuges am Kant-Gymnasium und wird hier seit der 5. Klasse unterrichtet. Die Klasse besteht aus 10 Jungen und 13 Mädchen. Für den Fachunterricht in Mathematik ist seit eineinhalb Jahren die Kollegin Lede-Piper zuständig.

**Speziell:** Die heutige Stunde ist die erste Stunde der letzten Doppelstunde vor den Herbstferien. Ich bin den Schüler\_innen bislang lediglich als Mitglied des Lehrerkollegiums am Kant und aus einer Hospitationsstunde in der letzten Woche bekannt.

**Fachlicher Schwerpunkt:** In der Unterrichtsreihe werden die Multiplikation und Division von Bruchzahlen eingeführt, in ihrer Sinnhaftigkeit erkennbar gemacht und geübt. Hierzu gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Zugänge: Entweder werden zunächst nur die Multiplikation (von natürlichen Zahlen mit Bruchzahlen und Bruchzahlen untereinander) und dann anschließend die Division behandelt oder aber es werden beide Rechenoperationen zusammen, dafür aber zunächst nur zwischen einer natürlichen Zahl und einer Bruchzahl behandelt. Für die in dieser Sequenz gewählte zweite Variante spricht, dass damit der enge Zusammenhang beider Rechenoperationen als Umkehroperationen deutlich wird (hier sogar insofern besonders deutlich, da die Division letztlich als Multiplikation mit dem Umkehrbruch ausgeführt wird). Ferner muss somit zunächst das Problem des „Teiles eines Teiles“ nicht thematisiert werden.

Die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch erfolgt, indem bei Beibehaltung des Nenners der Zähler der Bruchzahl mit der natürlichen Zahl multipliziert wird, anschließend sollte der Bruch vollständig gekürzt werden.

**Didaktische Reduktion:** Statt „natürlicher Zahl“ wird auch die Verwendung des Begriffes „ganze Zahl“ durch die Schüler\_innen akzeptiert, da negative Zahlen noch nicht bekannt sind und somit die Unterscheidung nicht zwingend ist.

### Aufgabenanalyse:

Zu AB1: Die gewählte Aufgabe bietet einen Zugang sowohl zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch als auch zur Division. Das dargestellte Sachproblem ist ein geeignetes Modell, um die Sinnhaftigkeit dieser Rechenoperationen zu verdeutlichen, da die ansonsten bislang benutz-

ten Modelle zur Bruchrechnung (Tortenteile, Pizzateile, Personen) zumindest für die Division nicht mehr tragfähig sind. Die Aufgabe ist insofern selbstdifferenzierend, als sie verschiedene Lösungsmöglichkeiten bietet: Es sind sowohl ein Zugang mittels naiv ausgeführter Multiplikation (und ggf. sogar Division) als auch eine Lösung ohne Multiplikation und Division, nämlich durch Probieren und vielfache Addition gleichnamiger Brüche möglich, ggf. machen die Schüler\_innen auch Gebrauch von den bereits eingeführten Dezimalbrüchen mit den dort eingeübten Rechenoperationen. Die Aufgabe bietet somit allen Schülern einen individuellen Zugang zur Lösung.

Zu AB2: Dieser Arbeitsbogen gibt zunächst die Möglichkeit, das Ergebnis des ersten Arbeitsbogens strukturiert festzuhalten. Anschließend wird das dort benutzte Verfahren an anderen Beispielen mit steigender Schwierigkeit reproduziert und eingeübt, um somit die Struktur der Argumentation zu verdeutlichen (Problem: Durch die Zahlen wird eine Abstraktion von Ausgangsproblem notwendig, denn die verwendeten Brüche würden so umgangssprachlich nicht mehr im Alltag verwendet werden). Vorletzte Stufe der Steigerung ist die Verwendung eines Bruches mit einem Wert größer als 1, letzte Stufe das eigene Erstellen einer Aufgabe analog zu den vorangegangenen. Es wurde bei den Brüchen darauf geachtet, dass nicht nur als endliche Dezimalzahlen darstellbare Brüche verwendet werden.

Die Spalten „Wie viele Liter Cola / Flaschen müssen gekauft werden“ ermöglichen den Schüler\_innen, auf verschiedene Arten zum Ergebnis zu kommen, z.B. durch das eher aufwändige Verfahren des Probierens. Mit den Spalten „Wie lässt sich das berechnen / Warum stimmt diese Angabe“ wird dann die Richtigkeit der Vermutung bestätigt, dabei wird das Verfahren der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch explizit thematisiert und seine Durchführung vorbereitet. Die Spalte „Wie lässt sich die Anzahl (ohne zu probieren!) berechnen“ führt auf die Formulierung einer Divisionsaufgabe als Umkehrung der zuvor dargestellten Multiplikation.

Unabhängig von der Anzahl der arbeitstempodifferenziert bearbeiteten Aufgaben (Zeilen) kann diese Struktur durch die Vorgaben auf dem Arbeitsbogen von allen Schüler\_innen erkannt werden.

7.

## Begründung der Lehr- und Lernstruktur

Eine Vorgabe des Stundenthemas erfolgt nicht, um nicht die möglichen Entdeckungen in der ersten Arbeitsphase vorwegzunehmen. Um das Verständnis der eher offenen Ausgangsfragestellung sicher zu stellen, erfolgt eine frontale Stellung dieser Aufgabe mit anschließender Wiedergabe der Aufgabe durch Schüler\_innen in eigenen Worten.

Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgt in heterogenen, von den Schüler\_innen selbst zusammengestellten Gruppen, da keine Leistungsdifferenzierung vorgesehen ist und zudem der Unterrichtende aufgrund mangelnder Kenntnisse der Kompetenz- und Leistungsstände in der Klasse sich nicht in der Lage sieht, eine sinnvolle Einteilung selbst durchzuführen. Jede Gruppe erhält nur ein Aufgabenblatt, auf dem ja nicht gearbeitet werden soll, um die Notwendigkeit der Zusammenarbeit zu fördern.

Die erste Sicherungsphase erfolgt frontal durch Gruppenpräsentationen, damit sichergestellt wird, dass sowohl verschiedene Lösungsansätze gewinnbringend für die gesamte Lerngruppe thematisiert werden können als auch alle Mitglieder der Lerngruppe durch Nachvollziehen in die Lage versetzt werden, die zweite Erarbeitungsphase sinnvoll angehen zu können. Dazu ist eine schriftliche Fixierung

Für die zweite Erarbeitungsphase bietet sich Partnerarbeit an, um so ggf. individuelle Probleme durch Interaktion lösen zu können. Die Arbeit in einer Gruppe bietet hier keine Vorteile mehr, da weder arbeitsteilig gearbeitet werden kann noch Kreativität gefordert ist. Unterschiedliches Arbeitstempo kann dazu führen, dass nicht alle Schüler\_innen alle sechs Aufgaben bearbeiten, was einerseits leistungsdifferenzierend und andererseits inhaltlich unproblematisch (s.o.) ist.

Eine mit einem einfachen Hinweis versehene (AB 1) und zwei in der Deutlichkeit der Unterstützung gestufte Hilfekarten (AB) werden eingesetzt, um zu erwartende Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung zu entschärfen. Im Falle anderer oder darüber hinausgehender Schwierigkeiten greift die Lehrkraft individuell durch gezielte, gestufte Impulse ein.

Da heute der letzte Tag vor den Herbstferien ist, wird auf die Stellung einer Hausarbeit verzichtet.

Zeitangaben		Phase/Intention	Sozialform/ Medien
Zeit	Dauer	Ggf. Aktivitäten / Impulse des Unterrichtenden	Ggf. Schüleraktivitäten
8.00	2'	<b>Begrüßung</b> Nicht ritualisierte Begrüßung und Erläuterung der Situation des Unterrichtsbesuches	
8.02	3'	<b>Einstieg / Motivation</b> Darstellung de Problemstellung durch ein szenisches Spiel zweier Schüler_innen	
8.05	10'	<b>Erarbeitung (I)</b> Aufteilung der Klasse in heterogene Zufallsgruppen von je vier Schüler_innen, Erstellung von Gruppentischen. Gemeinsame Bearbeitung des Arbeitsauftrages unter Beobachtung durch die Lehrkraft und die Seminarteilnehmer_innen.	Gruppenarbeit AB 1
8.15	10'	<b>Zwischensicherung</b> Frontale Präsentation der Arbeitsergebnisse durch mindestens eine Gruppe, sodass alle verschiedenen Lösungswege berücksichtigt werden können.	Schüler_innen- präsentation Tafel
8.25	10'	<b>Erarbeitung (II)</b> Bearbeitung der Aufgaben des Arbeitsbogens in Partnerarbeit unter Beobachtung und ggf. unter Hilfestellung des Unterrichtenden	Gruppenarbeit AB 2
8.35	10'	<b>Sicherung</b> Frontal gesteuerter Vergleich der numerischen Ergebnisse des AB 2. Formulierung und schriftliche Fixierung einer Regel zur Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch: <i>„Wir multiplizieren eine natürliche Zahl mit einem Bruch, indem wir unter Beibehaltung des Nenners die natürliche Zahl mit dem Zähler multiplizieren und anschließend den Bruch ggf. kürzen.“</i>	Gelenktes Unterrichtsge- spräch Tafel
		<b>Didaktische Reserve</b> Formulierung und schriftliche Fixierung einer Regel zur Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch: <i>„Wir dividieren eine natürliche Zahl durch einen Bruch, indem wir die natürliche Zahl mit dem Kehbruch multiplizieren und anschließend den Bruch ggf. kürzen.“</i>	Gelenktes Unterrichtsge- spräch Tafel

**9.**

## **Antizipation von Schwierigkeiten**

Es besteht die Möglichkeit, dass die Schüler\_innen die Bruchzahlen in Dezimalbrüche umrechnen, da der Umgang mit dieser Zahldarstellung bereits geübt wurde. In diesem Fall wird –auch mittels Hinweis auf Aufgabe 1.5- darauf hingewiesen, dass das Rechnen mit periodischen Dezimalzahlen problematisch ist.

Sollte das Rechenverfahren bereits einigen Schüler\_innen bekannt sein, z.B. durch Vorarbeiten im Lehrbuch), so wird die Gruppeneinteilung durch den Unterrichtenden in homogene Gruppen vorgenommen, um den anderen Schüler\_innen nicht die Möglichkeit zum Entdecken der Zusammenhänge zu nehmen.

Sollte die erste Erarbeitungsphase deutlich länger dauern oder aber viele kreative Ideen hervorbringen, so kann die zweite Erarbeitungsphase nach Klärung des Beispiels in eine Hausarbeit verlagert werden (Notausstieg).

**10.**

## **Ausblick auf die weitere Planung**

In der nächsten Stunde werden, ausgehend von der letzten Spalte der Aufgabe 1, die Regel zur Division einer natürlichen Zahl durch einen Bruch erarbeitet und auf einem Arbeitsblatt analog der zweiten Seite des AB2 festgehalten.

**11.**

## **Medien**

Tafel

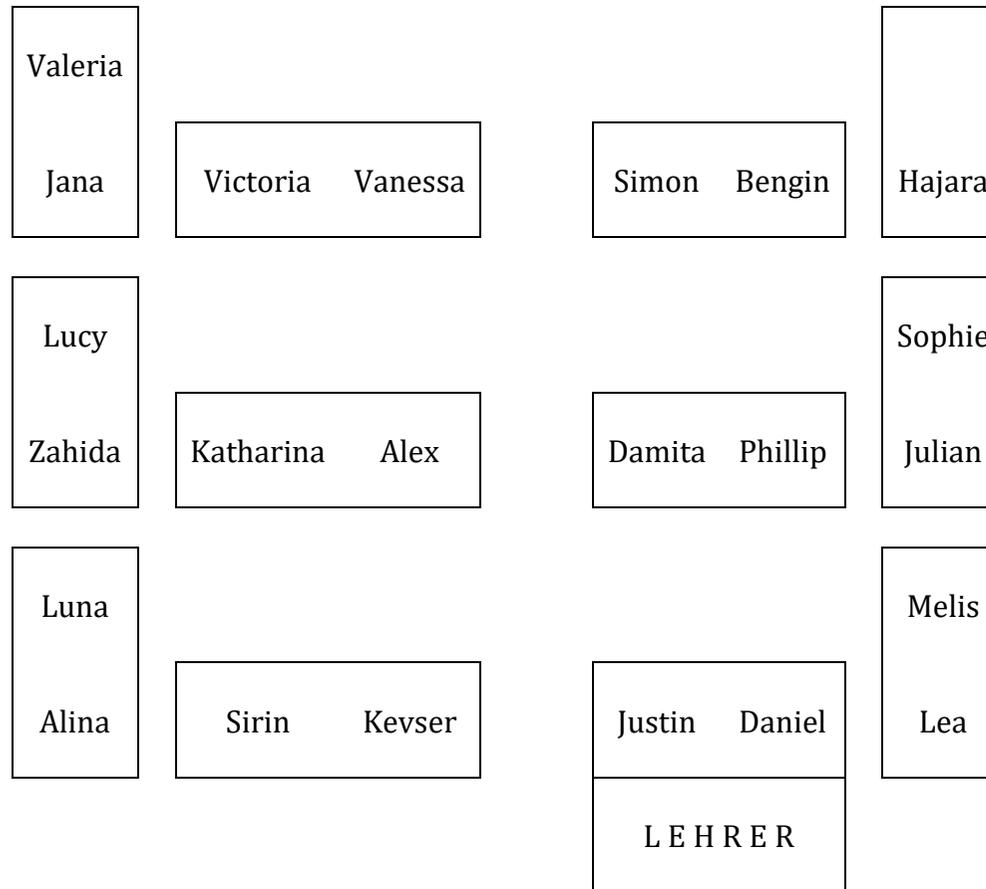
AB1: siehe Anlage

AB2: siehe Anlage

**12.**

## **Literaturangaben**

## Sitzplan:

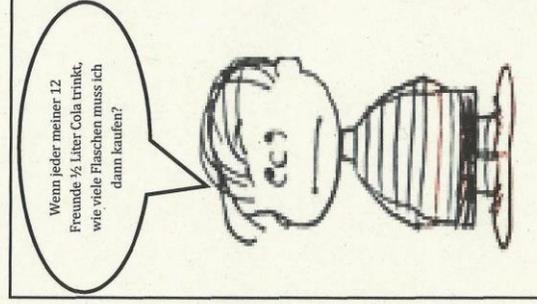


Mathematik Klasse 6  
Bruchrechnung

## Das Cola-Problem

### Das Problem

Linus will für seine Freunde zu seiner Geburtstagsfeier Cola kaufen (er selbst trinkt übrigens nur Mineralwasser!) und ist gerade dabei zu überlegen, als ihm Lucy eine niederschmetternde Mitteilung macht:



### Eure Aufgabe

Untersucht, ob das Problem vielleicht doch lösbar ist. Notiert eure Überlegungen und ggf. notwendige Rechnungen.

Bereitet euch darauf vor, eure Überlegungen zu präsentieren.

erstellt 2015-10-15  
© Hans-Joachim Brehm

KANT15-16/KLASSE 6/COLA\_PROBLEM\_ABL.DOCX - 1/1

Schülermaterialien : AB 2 mit Erwartungshorizont (Seite 1)

Mathematik Klasse 6  
Bruchrechnung

Das Cola-Problem - Teil 2

Aufgabe 1

Vervollständige die Tabelle, die erste Aufgabe ist, wie du siehst, die eben gerechnet. In Aufgabe 1.6 darfst du dir selbst die Vorgabezahlen ausdenken. Zur Bearbeitung der Spalte ganz rechts „Wie lässt sich die Anzahl (ohne zu probieren) berechnen?“ gibt es auf dem Lehrertisch zwei Hilfekarten mit Tipps, falls ihr keine Lösungsidee habt.

	Berechnung der benötigten Cola				Berechnung der benötigten Flaschen				
	Wie viele Kinder müssen versorgt werden?	Wie viele Liter Cola trinkt jedes Kind?	Wie viele Liter Cola müssen gekauft werden?	Wie lässt sich das berechnen?	Wie viele Liter Cola müssen gekauft werden?	Wie viele Liter Cola sind in einer Flasche?	Wie viele Flaschen müssen gekauft werden?	Warum stimmt diese Angabe?	Wie lässt sich die Anzahl (ohne zu probieren!) berechnen?
1.1	12	$\frac{1}{2}$	6	$12 \cdot \frac{1}{2} = 6$	6	$\frac{3}{4}$	8	$8 \cdot \frac{3}{4} = 6$	$6 : \frac{3}{4} = 8$
1.2	8	$\frac{1}{2}$	4	$8 \cdot \frac{1}{2} = 4$	4	$\frac{1}{2}$	8	$8 \cdot \frac{1}{2} = 4$	$4 : \frac{1}{2} = 8$
1.3	12	$\frac{3}{4}$	9	$12 \cdot \frac{3}{4} = 9$	9	$\frac{1}{2}$	18	$18 \cdot \frac{1}{2} = 9$	$9 : \frac{1}{2} = 18$
1.4	10	$\frac{2}{5}$	4	$10 \cdot \frac{2}{5} = 4$	4	$\frac{1}{4}$	16	$16 \cdot \frac{1}{4} = 4$	$4 : \frac{1}{4} = 16$
1.5	9	$\frac{2}{3}$	6	$9 \cdot \frac{2}{3} = 6$	6	$\frac{3}{2}$	4	$4 \cdot \frac{3}{2} = 6$	$6 : \frac{3}{2} = 4$
1.6									

erstellt 2015-10-15  
© Hans-Joachim Brehm

KANT15-16/KLASSE\_6/COLA\_PROBLEM\_AB2.DOCX - 1/2

Aufgabe 2

Welche Rechnungen mit was für Zahlen hast du bei „Wie lässt sich das berechnen?“ ausgeführt?

Ich habe die Anzahl der Kinder mit der Menge Cola, die jedes Kind trinkt, multipliziert!

Welche Rechnungen mit was für Zahlen hast du bei „Warum stimmt diese Angabe?“ ausgeführt?

Ich habe die Anzahl der gekauften Flaschen mit ihrem Inhalt multipliziert.

Kannst du eine allgemeine Regel angeben, wie diese Rechnungen ausgeführt wurden?

Man multipliziert mit einem Bruch, indem man die Zahl mit dem Zähler multipliziert, den Nenner behält und dann das Ergebnis kürzt!